令和６年度採用
山梨県公立学校教員選考検査

高等学校・数学　問題

「始め」という合図があるまで，このページ以外のところを見てはいけません。

注　　　　　意

1　この問題は５問４ページで，時間は60分です。

2　解答用紙は，別紙で配付します。「始め」の合図で始めてください。

3　解答は，それぞれの問題の指示に従って解答用紙に記入してください。

4　「やめ」の合図があったら，すぐやめて係の指示に従ってください。

5　解答用紙を持ち出してはいけません。

令和６年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

高等学校 数学

1　高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 数学について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　次の文は数学「第２款 各科目 第２ 数学Ⅱ　１ 目標」を示したものである。①～⑤ に当てはまる語句を，下の【語群】からそれぞれ一つ選び，記せ。

> １　目標
> 　数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。
> (1) いろいろな式，図形と方程式，指数関数・対数関数，三角関数及び微分・積分の考えについての基本的な概念や原理・法則を（ ① ）に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・（ ② ）したりする技能を身に付けるようにする。
> (2) 数の範囲や式の性質に着目し，等式や不等式が成り立つことなどについて論理的に考察する力，座標平面上の図形について構成要素間の関係に着目し，方程式を用いて図形を簡潔・明瞭・的確に表現したり，図形の性質を論理的に考察したりする力，関数関係に着目し，事象を的確に表現してその特徴を数学的に考察する力，関数の局所的な変化に着目し，事象を数学的に考察したり，問題解決の過程や結果を振り返って統合的・（ ③ ）に考察したりする力を養う。
> (3) 数学のよさを認識し数学を活用しようとする態度，（ ④ ）柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や（ ⑤ ）の基礎を養う。

【語群】

多面的	多角的	発展的	総合性	論理性	整理	よりよく
物理的	体系的	主体的	創造性	広く	処理	粘り強く

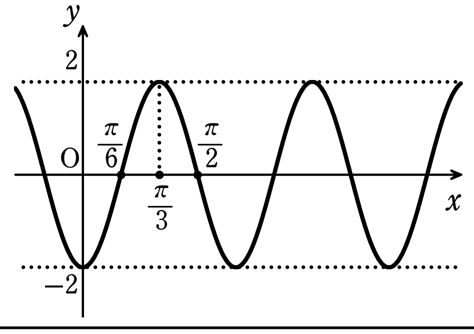
（２）　「第２款 各科目 第２ 数学Ⅱ　２ 内容（４）三角関数」の内容を扱う単元において，三角関数のグラフの特徴についての授業を行う。次の①～③を求めよ。また，①～③を求めるにあたり，どのようなことに着目させるか，記せ。

図１は関数

$$y = \boxed{\quad ① \quad}\sin\boxed{\quad ② \quad}\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\quad ③ \quad}}\right)$$

のグラフである。①～③について，適する値をグラフから読み取り，その値を記述せよ。

図１



2　次は数学Ⅱの授業で出題した問題と生徒の解答である。これについて，次の（１），（２）の問いに答えよ。

【問題】
x の３次方程式　$x^3-2(a+1)x^2+2a(a+1)x-a^3=0$　が重解をもつような実数 a の値とその重解を求めよ。

【生徒の解答】
左辺を $f(x)$ とおくと，$f(a)=a^3-2(a+1)a^2+2a^2(a+1)-a^3=0$　であるから，
$f(x)$ は　$x-a$　を因数にもつ。
よって，$f(x)=(x-a)\{x^2-(a+2)x+a^2\}$
$f(x)=0$　が重解をもつ $\Longleftrightarrow$ $x^2-(a+2)x+a^2=0$　が重解をもつ
$x^2-(a+2)x+a^2=0$　の判別式をＤとすると，Ｄ$=0$　より，

$a=-\dfrac{2}{3}$，2

したがって，　$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき　重解　$x=\dfrac{2}{3}$　，$a=2$ のとき　重解　$x=2$

（１）　この生徒の解答には論理的に誤っている部分がある。その誤り部分を記せ。また，正しい解答を記述せよ。

（２）　生徒が理解できるように，この問題のポイントを説明せよ。

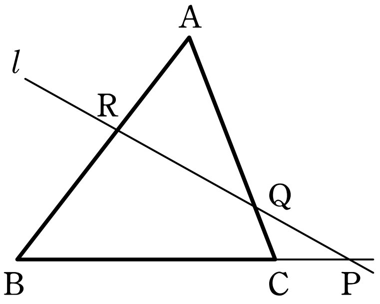
3　メネラウスの定理について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　△ABC の辺BC , CA , AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない１つの直線 l とそれぞれ点 P，Q ，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}\cdot\frac{\square}{\square}=\square$$

が成り立つように，$\square$ にあてはまる線分または値を記せ。

図２



（２）　メネラウスの定理の証明を記述せよ。ただし，図２のように点P が辺BC の延長上にあるものとする。

4　階段を上がるとき，一度に上がることができる段数は１段または２段のみであるとする。次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　ちょうど 13 段上る方法は全部で何通りか，記せ。

（２）　n を正の整数とする。ちょうど n 段上る方法は全部で何通りか，記せ。

5　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ …①　について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　点（４，０）から楕円①に引いた接線のうち，傾きが負であるものを求めよ。

（２）　楕円①と（１）で求めた接線とx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

高・数学１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※ 印のところは記入しない

受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

令和６年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1（30 点）

（１）	① 体系的	② 処理	③ 発展的	④ 粘り強く	⑤ 創造性

（２）		（値）	
	①	2	・y 軸方向に２倍に拡大されていることに着目させる。
	②	3	・周期について考えさせるため，グラフと x 軸の共有点に着目させる。
	③	6	・$y=\mathrm{A}\sin kx$ が原点対称のグラフであることと，グラフの位置に着目させる。

2（15 点）

（１）

【誤り部分】$f(x)=0$ が重解をもつ$\Longleftrightarrow x^2-(a+2)x+a^2=0$ が重解をもつ

【正しい解答】

左辺を $f(x)$ とおくと，$f(a)=a^3-2(a+1)a^2+2a^2(a+1)-a^3=0$ より

$f(x)$ は $x-a$ を因数にもつ。よって，$f(x)=(x-a)\{x^2-(a+2)x+a^2\}$

$f(x)=0$ が重解をもつ $\Longleftrightarrow$ （ⅰ）「$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が重解をもつ」または

（ⅱ）「$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が$x=a$ を解にもつ」が成り立つ。

（ⅰ）$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が重解をもつのは，この方程式の判別式をDとすると，D＝0 であるから

$a=-\dfrac{2}{3}$，2　したがって，$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき重解 $x=\dfrac{2}{3}$ ，$a=2$ のとき重解 $x=2$

（ⅱ）$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が $x=a$ を解にもつ$\Longleftrightarrow$ $a^2-(a-2)a+a^2=0$

すなわち，$a(a-2)=0$，$a=0,2$

$a=0$のとき　重解 $x=0$ ，$a=2$ のとき　重解 $x=2$

（ⅰ），（ⅱ）より$a=2$ のとき重解 $x=2$，$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき重解 $x=\dfrac{2}{3}$ ，$a=0$のとき重解 $x=0$

（２）

・３次方程式が重解をもつのは，２重解、３重解の両方を考える必要がある。

・２次方程式の解ともう１つの解について，重解になる場合を確認する必要がある。

・得られた解について，逆が成りたつことを確認するとさらによい。

3（15 点）

（１）

$$\frac{\mathrm{BP}}{\boxed{\mathrm{PC}}}\cdot\frac{\boxed{\mathrm{CQ}}}{\boxed{\mathrm{QA}}}\cdot\frac{\boxed{\mathrm{AR}}}{\boxed{\mathrm{RB}}}=\boxed{1}$$

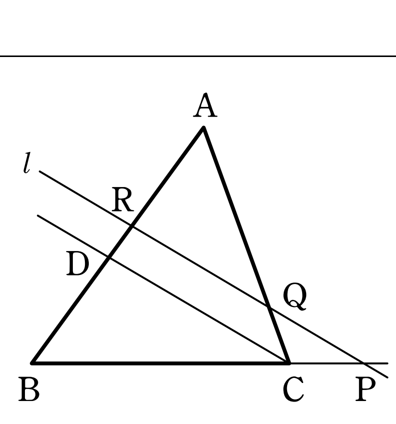
（２）

【証明】C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線AB との交点をD とすると

BP : PC＝BR : RD，CQ : QA＝DR :RA

すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}$，$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$



（裏面につづく）

4　20点

（１）

ちょうどｎ段上る方法の総数をa_n とすると　$a_1=1$，$a_2=2$ また，$n\geqq 3$のとき，ちょうどｎ段上がる方法は最初に１段上るとき，a_{n-1} 通り。最初に２段上るとき，a_{n-2} 通り。よって，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

ゆえに，数列$\{a_n\}$は$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ……①を満たす。

①より　$a_3=a_2+a_1=3$，　$a_4=a_3+a_2=5$，　$a_5=a_4+a_3=8$，　$a_6=a_5+a_4=13$，
$a_7=a_6+a_5=21$，　$a_8=a_7+a_6=34$，　$a_9=a_8+a_7=55$，　$a_{10}=a_9+a_8=89$，
$a_{11}=a_{10}+a_9=144$，　$a_{12}=a_{11}+a_{10}=233$，　$a_{13}=a_{12}+a_{11}=377$　　したがって377 通り。

<別解>　１段上るを①，２段上るを②とすると
①が 13 回，①が 11 回で②が 1 回，①が 9 回で②が 2 回，・・・，①が 1 回で②が 6 回の
7 パターンあり，${}_{13}C_0+{}_{12}C_1+{}_{11}C_2+{}_{10}C_3+{}_9C_4+{}_8C_5+{}_7C_6=377$　したがって377 通り。

（２）

（１）より，数列$\{a_n\}$　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ……①　の一般項を求めればよい。

$x^2-x-1=0$ の解 を $x=\alpha, \beta$，　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　とすると

①は $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形できる。

数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$は初項$a_2-\alpha a_1=2-\alpha$ 公比 β の等比数列で，　$a_{n+1}-\alpha a_n=(2-\alpha)\cdot\beta^{n-1}$ ……②

数列$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$は初項$a_2-\beta a_1=2-\beta$ 公比 α の等比数列で，　$a_{n+1}-\beta a_n=(2-\beta)\cdot\alpha^{n-1}$ ……③

②－③より　$-(\alpha-\beta)a_n=(2-\alpha)\cdot\beta^{n-1}-(2-\beta)\cdot\alpha^{n-1}$　　$2-\alpha=\beta^2, 2-\beta=\alpha^2, \alpha-\beta=\sqrt{5}$

$-\sqrt{5}a_n=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}$　　$\sqrt{5}a_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$　　ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

したがって，ちょうどｎ段上るのぼり方は　$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$ 通り。

5　20点

（１）

楕円の式の両辺を x で微分すると，　$\dfrac{x}{2}+2yy'=0$，$y'=-\dfrac{x}{4y}$　接点を点 $P(x_1,y_1)$ とすると，

傾きは $-\dfrac{x_1}{4y_1}$ である。接線　$y-y_1=-\dfrac{x_1}{4y_1}(x-x_1)$ は$(4,0)$を通るので，代入すると，$4y_1{}^2=4x_1-x_1{}^2$ …①

接点は楕円上にあるから$\dfrac{x_1{}^2}{4}+y_1{}^2=1$ …②，①②を連立し，傾きが負の接線は　$y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)$　となる。

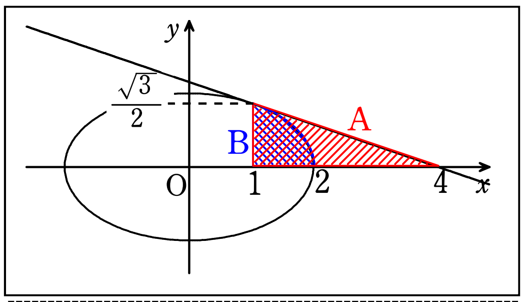
<別解>　楕円$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　上の点 $P(x_1,y_1)$ における 接線 $\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$ は点$(4,0)$を通るので，代入すると

$x_1=1, y_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　が得られる。接線の傾きが負であることより，$y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって求める接線は，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$　すなわち，$x+2\sqrt{3}y=4$　　$\left(y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)\right)$

（２）

右図のように面積を三角形Ａと楕円の一部Ｂに分ける。



$x=2\sin\theta$とおく　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$1 \to 2$
θ	$\dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{\pi}{2}$

Ａ－Ｂ　が求める面積である。

Ａ：（１）より　$x=1$のときの y 座標は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので，

面積は　$3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Ｂ：面積は　$\displaystyle\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\, d\theta$

$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$A-B=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$　　したがって，求める面積は $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$