令和５年度採用
山梨県公立学校教員選考検査

高等学校・数学　問題

「**始め**」という合図があるまで，このページ以外のところを見てはいけません。

注　　　　意

1　この問題は**５問４ページ**で，時間は**60分**です。

2　解答用紙は，**別紙**で配付します。「**始め**」の合図で始めてください。

3　**解答**は，それぞれの問題の指示に従って**解答用紙**に記入してください。

4　「**やめ**」の合図があったら，すぐやめて係の指示に従ってください。

5　**解答用紙を持ち出してはいけません。**

令和５年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

高等学校 数学

$\boxed{1}$　高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 数学について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　次の文は数学「第２款 各科目 第１ 数学Ⅰ　２ 内容 (1)数と式」の一部を示したものである。（ ① ）～（ ⑧ ）に当てはまる語句を，【語群】から選び解答欄に記せ。

> 数と式について，数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。
> ア　次のような知識及び（ ① ）を身に付けること。
> （ア）　数を（ ② ）まで拡張する意義を理解し，簡単な無理数の四則計算をすること。
> （イ）　集合と（ ③ ）に関する基本的な概念を理解すること。
> （ウ）　（ ④ ）の乗法公式及び因数分解の公式の理解を深めること。
> （エ）　不等式の解の意味や不等式の性質について理解し，一次不等式の解を求めること。
> イ　次のような思考力，判断力，（ ⑤ ）等を身に付けること。
> （ア）　集合の考えを用いて論理的に考察し，簡単な（ ③ ）を証明すること。
> （イ）　問題を解決する際に，既に学習した計算の方法と関連付けて，式を（ ⑥ ）に捉えたり目的に応じて適切に変形したりすること。
> （ウ）　不等式の性質を基に一次不等式を解く方法を考察すること。
> （エ）　日常の事象や（ ⑦ ）の事象などを（ ⑧ ）に捉え，一次不等式を問題解決に活用すること。

【語群】

写像	関心	社会	直観的	複素数	技能	実数	多面的	命題
二次	三次	関数	理解力	数学的	集合	経済	物理的	表現力

（２）　第２款 各科目 第１ 数学Ⅰ　２ 内容 〔課題学習〕の授業において，次のような証明問題を生徒に示す。この証明問題の証明過程を記述せよ。また，生徒に指導する際，特に注意すべきポイントを記述せよ。

> 有理数全体の集合 Q に無理数 $\sqrt{2}$ をつけ加え，有理数 p ，q を用いて $p+q\sqrt{2}$ と表される数全体の集合を $\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ とおく。このとき
>
> $\alpha,\ \beta \in \mathrm{Q}(\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad$ 商 $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathrm{Q}(\sqrt{2})$ を証明しなさい。ただし $\beta \neq 0$ とする

2　次は数学Ⅲの授業で生徒に出題した問題と生徒の解答である。これについて，下の問いに答えよ。

【問題】

方程式　$\sqrt{x+2}=x$ を解きなさい。

【生徒の解答】

x を実数とする。与えられた方程式の左辺の式の符号を考えることにより，

右辺においても $x \geq 0$ となるので，求める解の範囲は　$x \geq 0$ …①　として考える。

与えられた等式　$\sqrt{x+2}=x$ の両辺を２乗すると $x+2=x^2$ となる。

$x^2-x-2=0$ から因数分解して，$(x-2)(x+1)=0$ より，

$x=2$，-1 となる。① から $x=-1$ は解として不適である。

よって，方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の解は $x=2$ となる。

問　この生徒から，「 $x=-1$ は数学的にはどのような意味をもつのですか」と問われたときの説明を記述せよ。

$\boxed{3}$ 不等式 $\log_x y < 2 + 3\log_y x$ について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１） $x > 1$ かつ $y > 1$ のとき，不等式 $\log_x y < 2 + 3\log_y x$ を満たす点（ x ，y ）の存在範囲を図示せよ。

（２） $\log_x y < 0$ のとき，不等式 $\log_x y < 2 + 3\log_y x$ を満たす点（ x ，y ）の存在範囲を図示せよ。

4　曲線 $y=x^2$ （$0 \leq x \leq 2$）を y 軸のまわりに回転してできる容器に水を満たし，時刻 $t = 0$ に排水を開始する。時刻 t において容器に残る水の深さを h，体積を V とするとき，

$\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ となるように排水する。

このことについて，次の（１）～（３）の問いに答えよ。

（１）　水深 h のときの体積 V を h を用いて表せ。

（２）　水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

（３）　容器内の水を完全に排水するのに要する時間 T を求めよ。

5　p を素数とするとき，下の二項係数はすべて p の倍数となることを示せ。

二項係数　${}_pC_1$，${}_pC_2$，${}_pC_3$，…，${}_pC_{p-1}$

高・数学１

受検番号		氏名	

※ 印のところは記入しない

※

切り取らないこと

令和５年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1 (30点)

（１）

①	技能	②	実数	③	命題	④	二次
⑤	表現力	⑥	多面的	⑦	社会	⑧	数学的

（２）

【証明過程】

$a,b,c,d\ \in \mathrm{Q}$ とし，$\alpha = a+b\sqrt{2}$,$\beta = c+d\sqrt{2}$ とおくと α，$\beta \in \mathrm{Q}(\sqrt{2})$ である。ただし， $c \neq 0$ または $d \neq 0$ とする。

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$$

ここで，有理数は四則演算に関して閉じているので $\dfrac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ ，$\dfrac{bc-ad}{c^2-2d^2} \in \mathrm{Q}$　　$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathrm{Q}(\sqrt{2})$

【注意すべきポイント】

商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を実際計算し，その式が $p_1+q_1\sqrt{2}$ の形になることを確かめさせる。

商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を実際計算して得られる式 $p_1+q_1\sqrt{2}$ において，有理数は四則演算において閉じていることから，

p_1，$q_1 \in\ \mathrm{Q}$ となることを確認し， $p_1+q_1\sqrt{2}\ \in \mathrm{Q}(\sqrt{2})$ となることを説明する。　　等

2 (20点)

【例１】方程式 $\sqrt{x+2}=x$ と方程式 $x+2=x^2$ のそれぞれの解を「解の集合」と捉え，解の集合の包含関係を用いて２つの方程式の解の同値性（必要性や十分性の確認）を考察し，説明する場合。

命題 P1 : $\sqrt{x+2}=x \ \Rightarrow\ x+2=x^2$ は解の集合を用いて $\{\ 2\ \} \Rightarrow \{-1\ ,2\ \}$ と表すことができ，真の命題である。これより方程式 $x+2=x^2$ の解 $x=2$ ，-1 は必要条件であり，方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の解 $x=2$ は十分条件となっていることを説明する。

命題 P2 : $x+2=x^2 \ \Rightarrow\ \sqrt{x+2}=x$ は偽の命題となり，反例は $x=-1$ となる。

以上より，方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の解の集合と方程式 $x+2=x^2$ の解の集合は同値ではないことを理解させる。

$x=-1$ は命題 P1 の必要条件であり十分条件ではないことを説明する。

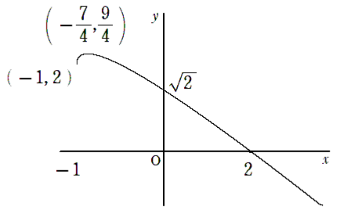
補足　方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の両辺を２乗することで，解の集合の範囲が拡大したものと捉えられる。$x=-1$ を無縁根という。

【例２】　$x=-1$ の図形的意味を，グラフと x 軸との共有点の考察をとおして説明する場合。

方程式 $\sqrt{x+2}=x$ 及び方程式 $x+2=x^2$ の実数解はそれぞれ，関数 $f(x)=\sqrt{x+2}-x$ 及び関数 $g(x)=x^2-x-2$のグラフの x 軸との共有点として同一視できる。このことを利用して $x=-1$ について説明する。 $x=-1$ は関数 $g(x)=x^2-x-2$ の x 軸との２つの共有点のうちの１つであることを説明する。なお，グラフの考察においては，増減，極値，凹凸について確認することが必要である。

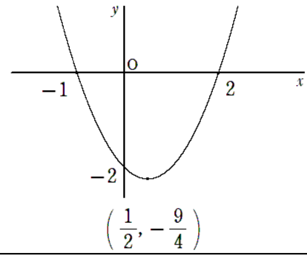
○関数 $f(x)=\sqrt{x+2}-x$ のグラフ

x軸との共有点は１つで 交点は $x=2$ である



○関数 $g(x)=x^2-x-2$ のグラフ

x軸との共有点は２つで 交点は $x=2$ と $x=-1$ である。



（裏面に続く）

3（20点）

（１）

$x>1$ かつ $y>1$ のとき，$\log_x y>0$ … ① である。

①より不等式 $\log_x y<2+3\log_y x$ は底の変換公式を用いて，

次のように変形される。

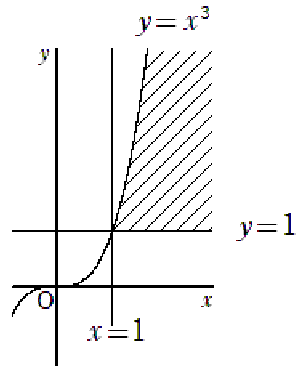
$(\log_x y-3)(\log_x y+1)<0$.…②

①かつ②から $0<\log_x y<3$ よって $\log_x 1<\log_x y<\log_x x^3$

$x>1$ より，$1<y<x^3$

$x>1$ かつ $y>1$ とあわせて，点 (x,y) の存在範囲は

右図の斜線の範囲となる。ただし境界線は含まない。



（２）

$\log_x y<0$ …③ であるので不等式 $\log_x y<2+3\log_y x$ は次のように変形される。

$(\log_x y-3)(\log_x y+1)>0$ … ④

③かつ④から $\log_x y<-1$ となる。

ここで底 x の範囲で場合分けを行う。

ｉ）$x>1$ のとき

③より $y<1$，また，$\log_x y<\log_x x^{-1}$ から $y<\frac{1}{x}$

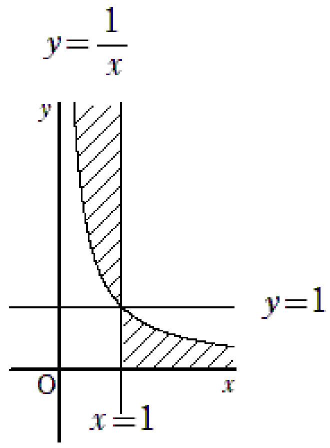
よって，点 (x,y) は $x>1$, $y<1$, $y<\frac{1}{x}$ を満たす。

ⅱ）$0<x<1$ のとき

③ より $y>1$，また，$\log_x y<\log_x x^{-1}$ から $y>\frac{1}{x}$

よって，点 (x,y) は $0<x<1$, $y>1$, $y>\frac{1}{x}$ を満たす。

ｉ)，ⅱ）より，点 (x,y) の存在範囲は右図の斜線の範囲となる。ただし境界線は含まない。



4（20点）

（１）

$$V=\int_0^h \pi x^2\,dy=\pi\int_0^h y\,dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}h^2$$

（２）

$V=\frac{\pi}{2}h^2$ の両辺を t で微分すると，$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}h^2\right)=\frac{d}{dh}\left(\frac{\pi}{2}h^2\right)\cdot\frac{dh}{dt}==\pi h\frac{dh}{dt}$

与えられた条件 $\frac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ を用いて，$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ を得る。

（３）

$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ より 両辺を t で積分すると，$\frac{2\pi}{3}h^{\frac{3}{2}}=-t+c$ … (※) （ただし c は積分定数）

(※) において，$t=0$ のとき，$h=4$ であるから，$c=\frac{16\pi}{3}$ となる。

よって，容器内の水を完全に排水するのに要する時間 T は $h=0$ のときであるから

(※) より，$T=\frac{16\pi}{3}$ となる。

5（10点）

二項係数 ${}_pC_k$は，${}_pC_k=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-k+1)}{k!}$ $(k=1,2,\cdots,p-1)$ とかける。

二項係数 ${}_pC_k$ は異なる p 個のものから k 個選ぶ選び方の総数であるから整数値となる。

分子の p は素数であり，$p>k$ であるから，p と $k!$ は互いに素である。∵ $k!$ を構成する素因数に p を割るものはない。

よって二項係数 ${}_pC_k$ は，${}_pC_k=p\times(\text{整数})$ となる。∴ ${}_pC_k$ $(k=1,2,\cdots,p-1)$ は p の倍数である。