令和４年度採用
山梨県公立学校教員選考検査

高等学校・数学　問題

「**始め**」という合図があるまで，このページ以外のところを見てはいけません。

注　　　　　意

1　この問題は４**問**４**ページ**で，時間は60**分**です。

2　解答用紙は，**別紙**で配布します。「**始め**」の合図で始めてください。

3　**解答**は，それぞれの問題の指示に従って**解答用紙**に記入してください。

4　「**やめ**」の合図があったら，すぐやめて係の指示に従ってください。

5　**解答用紙を持ち出してはいけません。**

令和４年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

高等学校　数学

1　高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）数学について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　次の文は「第２款 各科目 第１ 数学Ⅰ ２ 内容 (4)データの分析」の一部を示したものである。

（ ① ）～（ ⑧ ）に当てはまる語句を，下の語群からそれぞれ選び解答欄に記せ。

> データの分析について，（ ① ）を通して，その有用性を認識するとともに，次の事項を身に付けることができるよう指導する。
> ア　次のような知識及び技能を身に付けること。
> （ア）分散，標準偏差，散布図及び（ ② ）の意味やその用い方を理解すること。
> （イ）（ ③ ）などの情報機器を用いるなどして，データを表やグラフに整理したり，分散や標準偏差などの基本的な統計量を求めたりすること。
> （ウ）具体的な事象において（ ④ ）の考え方を理解すること。
> イ　次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。
> （ア）データの散らばり具合や（ ⑤ ）を数値化する方法を考察すること。
> （イ）目的に応じて複数の種類のデータを収集し，適切な統計量やグラフ，手法などを選択して分析を行い，データの（ ⑤ ）を把握して事象の（ ⑥ ）を表現すること。
> （ウ）（ ⑦ ）な事象の起こりやすさに着目し，主張の妥当性について，（ ⑧ ）などを通して判断したり，批判的に考察したりすること。

【語群】

平均値や中央値	実験	主体的活動	特徴	大型提示装置	傾向
探究的活動	仮説検定	標本調査	最頻値	コンピュータ	確実
不確実	相関係数	回帰直線	数学的活動		

（２）「第２款　各科目　第１　数学Ⅰ　２内容　(4)データの分析　ア（ア），イ（ア）」の内容を扱う単元において，データの散らばりの度合いを数値化する方法として分散を扱うとき，以下の２つの式 V_1 ，V_2 を考察する授業を行う。このときどのような指導をするか，具体例をあげて，あなたの考えを記せ。

【２つの式】

n 個のデータ x_1 ， x_2 ， x_3 ， $\cdots$ ，x_n に対し，$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$ とする。

$$V_1 \;:\; V_1 = \frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})\}$$

$$V_2 \;:\; V_2 = \frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\}$$

2　次の（１）～（８）の問いに答えよ。なお，結果のみ解答欄に記せ。

（１）　定義域を $0 \leq x \leq 3$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ の最大値が 9 ， 最小値が 1 のとき，定数 a ， b の値を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

（２）　496 の正の約数全ての和を求めよ。

（３）　8 人を 3 人，3 人，2 人の 3 つのグループに分ける分け方は何通りあるか。

（４）　次の値を求めよ。

$$\cos\frac{2}{9}\pi + \cos\frac{4}{9}\pi + \cos\frac{8}{9}\pi$$

（５）　関数

$$f(x) = \frac{\sqrt{ax+4}-5}{x-3}$$

が $x \to 3$ のとき収束するように定数 a の値を定めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

（６）　次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{k} 2\right)$$

（７）　病気 X を診断する検査で，病気 X にかかっている人が正しく陽性と判定される確率は $80\ \%$ ，病気 X にかかっていない人が誤って陽性と判定される確率は $10\ \%$ である。
　A 市では 4 ％の人が病気 X にかかっているものとするとき，A 市のある人がこの検査を受け，陽性と判定されたとき，その人が病気 X にかかっている確率を求めよ。

（８）　次の 3 次の正方行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

3　次は数学Ⅲを学んだ生徒に出題した問題である。

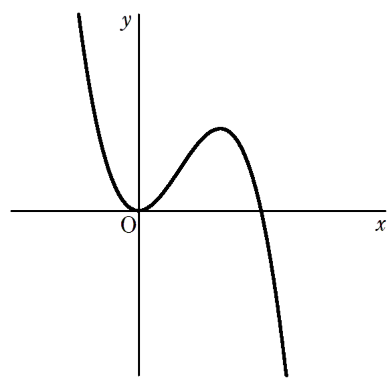
問題

> 曲線
>
> $$y = \frac{|\,x\,|}{e^x}$$
>
> のグラフの概形を xy 平面にかきなさい。

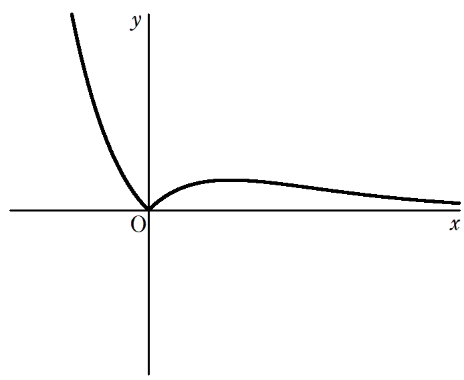
以下は問題を解答した生徒の記述と教師の模範解答例であり，生徒の記述には誤りがある。

この生徒がグラフの概形を正しくかくためにどのような指導が必要となるか，数学的内容にふれながら記述せよ。

生徒の記述



教師の模範解答例



$\boxed{4}$　次の（１），（２）の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = \tan^{-1} x$ （ $0 \leq x \leq 1$ ）を逆関数の微分法を用いて微分し， x の関数として表せ。計算過程も記せ。

(2)　曲線 $y = \tan^{-1} x$ （ $0 \leq x \leq 1$ ）と x 軸 および 2 直線 $x = 0$ ， $x = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。計算過程も記せ。

受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

※ 印のところは記入しない

令和４年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1 (26点)	（１）	①	数学的活動	②	相関係数	③	コンピュータ	④	仮説検定
		⑤	傾向	⑥	特徴	⑦	不確実	⑧	実験
	（２）	指導例 ○教師は平均が同じである，偏差が大きいデータと偏差が小さいデータを用意する。 ・２つのデータのセットの散らばり具合いの違いは生徒にヒストグラムや箱ひげ図などを書かせ実感させておく。 ○ V_1 ， V_2 の値を生徒に計算させる。 ・データ数も考慮し，計算のしやすさにも配慮する。ICT も活用する。 ○ V_1 ， V_2 の値を観察させる。V_2 を用いる妥当性を理解させる。 ・V_1 の値は与えられたデータの偏差の大小にかかわらず常に 0 である。 それに対し V_2 の値は偏差が大きいデータの場合は大きく，偏差が小さいデータの場合は小さくなり，データの散らばりの度合いを数値化するには適しているのではないかという結論に導いていく。その後， V_2 を分散として定義する。							

2 (32点)	（１）	$a=2$	$b=3$
	（２）	992	
	（３）	280	
	（４）	0	
	（５）	$a=7$	極限値 $\dfrac{7}{10}$
	（６）	$n(n-1)$	
	（７）	$\dfrac{1}{4}$	
	（８）	1	

（裏面に続く）

3

22 点

関数 $f(x)$ において生徒は x の区間による場合分けや，関数の増減についてある程度理解していると判断できる。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x} & (x \geqq 0)\\[2mm] \dfrac{-x}{e^x} & (x<0)\end{cases}$$

このことを踏まえ次のように指導を行う。

【必要事項】

生徒の解答から，

- $x=0$ における関数 $f(x)$ の微分係数の存在（グラフのつなぎ目のなめらかさ）をしらべること，
- 関数 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ からグラフの凹凸をしらべること，
- $x\to\pm\infty$ における関数 $f(x)$ の振るまいについて調べること

が必要事項になると考えられる。

【指導内容】

○　$x=0$ における関数 $f(x)$ の微分可能性について指導する。

$x=0$ における微分係数は

（ｉ）$x\geqq 0$ において 右微分係数 $f'_+(0)=1$

（ⅱ）$x<0$ において左微分係数 $f'_-(0)=-1$

よって原点 $(0,0)$ において微分係数が存在しない。微分不可能である。

○　関数の凹凸について，第２次導関数をもとめ，符号の変化より求める。

$x<0$ では $f''(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$ ，　$x\geqq 0$ では $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$ である。

- 区間 $x<0$ では $f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸
- 区間 $0\leqq x<2$ では $f''(x)<0$ より，$y=f(x)$ のグラフは上に凸
- 区間 $x>2$ では $f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸となることを理解させる。

※　$f''(2)=0$ である。

○ $x\to\pm\infty$ における $f(x)$ の振るまい，つまり漸近挙動について理解させる。

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

において，特に $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ となることについては，以下のように指導する。

$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ を利用し，

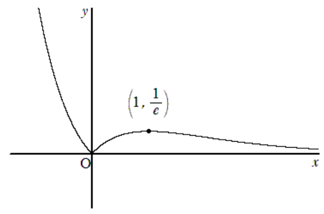
$e^x>\dfrac{x^2}{2}$ から $0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{2}{x}$ とし，はさみうちの原理より $\dfrac{x}{e^x}\to 0\ (x\to\infty)$ となることを指導する。

これらの指導を通じて，$x=0$ での関数 $f(x)$ の微分可能性，グラフの凹凸，$x\to\pm\infty$ におけるグラフの漸近挙動を捉えることができる。

その結果，以下のような増減及び凹凸を調べた表及び正しいグラフがかけることにつながる。

なお，任意の x において関数 $f(x)$ の値は非負であることも，グラフを捉えさせる見方の一つになっていることにも注意させたい。

x		0		1		2	
$f'(x)$	$-$	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	／	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{2}{e^2}$	↘
		極小値		極大値		変曲点	



4

20 点

（１）

$y=\tan^{-1}x$ より，$x=\tan y$ である。

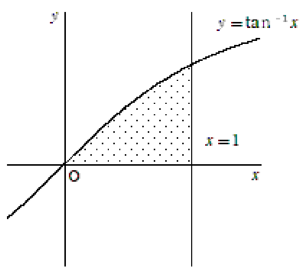
$x=\tan y$ の両辺を x で微分すると，　$1=\dfrac{d}{dy}\tan y\cdot\dfrac{dy}{dx}$ より $1=\dfrac{1}{\cos^2 y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

（２）

求める面積は右の図のようになる。

グラフについては，(1) で求めた導関数の符号が常に正であることや，$y=\tan x$ のグラフと $y=x$ のグラフに関して線対称であることを用いてかく。



求める面積をSとおく。

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx\\&=\left[x\tan^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$